Université Abdelmalek Assaâdi
FST Tanger/M112/ Année 10-111/

Série de TD n°2

Exercice1
Déterminer l'ensemble de définition D_f et la parité des fonctions suivantes

$$a)\ f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}; \qquad b)\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right);$$
$$c)\ f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \qquad d)\ f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Exercice2
Soient $a, b > 0$. Calculer:

$$a)\ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]; \qquad b)\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right];$$
$$c)\ \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right].$$

Exercice3
Calculer les limites suivantes:

$$a)\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - 1\right); \qquad b)\ \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sin(\pi x)}{\sin(2\pi x)};$$
$$c)\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos(px) - \cos(qx)}{x^2}; \qquad p, q \in \boldsymbol{N}^*$$

Exercice4
Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application croissante (non nécessairement continue). On considère l'ensemble

$$X = \{y \in [0,1] \,/\, f(y) \geq y\},$$

1. Montrer que X admet une borne supérieure m.
2. Montrer que $m \in [0,1]$ et que $m = f(m)$.

Exercice5
Soit f définie sur $\boldsymbol{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x\left[\dfrac{1}{x}\right] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Etudier la continuité de f.

Exercice6
Soit $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, telle que

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

ETUSUP .com

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.

2. On considère la fonction $g(x) = xf(x)$, montrer que g est continue en 0.

Exercice7

1. Soit f et g deux fonctions réelles continues sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = g(1) = 0$ et que $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que

$$\forall \lambda \in \boldsymbol{R}^+, \exists x \in [0,1] \text{ tel que } f(x) = \lambda g(x).$$

2. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Exercice8

1. Montrer que l'équation $x^7 + 3x^4 - x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

2. Montrer que l'équation $\ln(x^3 + x^2 + x - 3) = 0$ admet une solution unique dans $]1,2[$.

Exercice9

Soit f une fonction réelle définie sur $\boldsymbol{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel $k \in [0,1[$ tel que

$$|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|, \forall x, x' \in \boldsymbol{R}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\boldsymbol{R}$.

2. Soit $a \in \boldsymbol{R}$. On définit la suite $(x_n)_n$ par:

$$\begin{cases} x_0 & = & a, \\ x_{n+1} & = & f(x_n). \end{cases}$$

- Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel $l \in \boldsymbol{R}$.
- Montrer que $l = f(l)$.

ETUSUP .com

TD N°: 2 — 09-10 ; S1

Ex1 a/ $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

le discriminant des 2 trinomes x^2+x+1 et x^2-x+1 est $\Delta = 1-4 = -3 < 0$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2+x+1>0$ et $x^2-x+1>0$ (signe de $a=1$) $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

b/ $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

Si $x \geq 0$ alors $x^2+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x+\sqrt{1+x^2} > 0$

Si $x \leq 0$ alors $\sqrt{1+x^2}+x = \dfrac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} > 0$ d'où $D_f = \mathbb{R}$

c/ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\Rightarrow D_f =]-1,1[$

d/ $f(x) = \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$; $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \neq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1,-1\}$

Ex2 Rappel sur la partie entiere

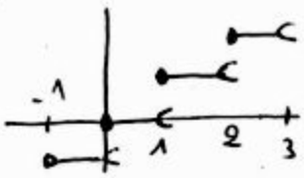
Def: $E(x) = [x]$ est le plus grand entier relatif inferieur ou egal à x

càd $E(x) = p \Leftrightarrow p \leq x < p+1 \Leftrightarrow x \in [p, p+1[$

Proprietes : • $\forall x \in \mathbb{R}$: $E(x) \in \mathbb{Z}$; • $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$: $E(x+p) = E(x)+p$

• $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $E(x+y) = E(x)+E(y)+\varepsilon$; $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$;

• $\forall x \in \mathbb{R}$: $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $x-1 < E(x) \leq x$



E est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et croissante

a/ Si $x>0$: $\dfrac{b}{x}-1 < \left[\dfrac{b}{x}\right] \leq \dfrac{b}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{a}\left(\dfrac{b}{x}-1\right) < \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] \leq \dfrac{x}{a}\left(\dfrac{b}{x}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a} - \dfrac{x}{a} < \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] \leq b/a \Rightarrow \lim\limits_{0^+} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] = \dfrac{b}{a}$

Si $x<0$: $\dfrac{x}{a} \cdot \dfrac{b}{x} \leq \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] < \dfrac{x}{a}\left(\dfrac{b}{x}-1\right) \Rightarrow \dfrac{b}{a} \leq \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] < \dfrac{b}{a} - \dfrac{x}{a}$

$\Rightarrow \lim\limits_{0^-} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] = \dfrac{b}{a}$ d'où $\lim\limits_{0} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] = \dfrac{b}{a}$

b/ $x>0$: $\dfrac{x}{a}-1 < \left[\dfrac{x}{a}\right] \leq \dfrac{x}{a} \Rightarrow \dfrac{b}{x}\left(\dfrac{x}{a}-1\right) < \dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right] \leq \dfrac{b}{x} \cdot \dfrac{x}{a}$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{x} < \dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right] \leq \dfrac{b}{a}$ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right] = b/a$

c/ $x<0$: $\dfrac{b}{a} \leq \dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right] < \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{x} \Rightarrow \lim\limits_{-\infty} \dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right] = b/a$

ETUSUP .com

Exercice 5 :

- la fct $x \mapsto E(x)$ est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ donc f est continue en tout point $x \neq \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.
- Sur $]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$: $k \neq 0$; $[\frac{1}{x}] = k$ et $f(x) = 1 - xk$ d'où $\lim_{x \to (\frac{1}{k})^-} f(x) = 0$
- Sur $]\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]$: $[\frac{1}{x}] = k-1$ et $f(x) = 1 - x(k-1)$ d'où $\lim_{x \to (\frac{1}{k})^+} f = \frac{1}{k}$ $\Big\} \Rightarrow$ f n'est cont en $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^*$
- On a : $\frac{1}{x} - 1 < \quad \leq \frac{1}{x}$ d'où $0 \leq f(x) < x$ si $x > 0$ et $x \leq f(x) < 0$ si $x < 0$

d'où $\lim_0 f(x) = 0 = f(0)$

càd f est cont en 0.

Exercice 3

a/ $\lim_{x \to +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ $\quad (X = 1/x)$

b/ $\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin \pi(X+1)}{\sin 2\pi(X+1)} = \lim_{X \to 0} \frac{-\sin \pi X}{\sin 2\pi X} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin \pi X}{\pi X} \cdot \frac{2\pi X}{\sin 2\pi X} \cdot (-\frac{1}{2})$

$= 1 \times 1 \times (-1/2) = -1/2$

c/ $\lim_{x \to 0} \frac{\cos px - \cos qx}{x^2} = \lim_0 \frac{(\cos px - 1) - (\cos qx - 1)}{x^2} = \lim_0 \frac{\cos px - 1}{(px)^2} \times p^2 - \frac{\cos qx - 1}{(qx)^2} \cdot q^2 = \frac{q^2 - p^2}{2}$

Exercice 4 $\quad f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ croissante

1/ On a $f(0) \geq 0$ et $0 \in [0,1]$ donc $0 \in X$ d'où $X \neq \emptyset$

$X \neq \emptyset$ et $X \subset [0,1]$ donc X admet une borne supérieure

note $\sup X = m$ et elle est finie.

2/ . $X \subset [0,1]$ donc $m = \sup X \in [0,1]$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\exists (x_n) \subset X$ / $m - \frac{1}{n} < x_n \leq m$

f croissante $\Longrightarrow$ $x_n \leq f(x_n) \leq f(m)$: à la limite on obtient $m \leq f(m)$

, Soit (y_n) une suite telle que $y_n \longrightarrow m$ et telle que $f(y_n) \leq y_n$.

la suite (y_n) existe car sinon $m \neq \sup X$

On a $f(m) \leq f(y_n) \leq y_n$ et donc à la limite on a $f(m) \leq m$

d'où $f(m) = m$

Exercice 6 $\quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

1/ Soit la suite $x_n = \frac{1}{n\pi}$ alors $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$

mais la suite $f(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ diverge (ne converge pas vers $f(0) = 0$)

donc f n'est pas continue en 0

2/ $g(x) = x f(x)$

Pour $x \neq 0$ $\quad |g(x)| = |x \cos \frac{1}{x}| \leq |x|$ car $|\cos \frac{1}{x}| \leq 1$

Or $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ d'où $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$

ETUSUP .com

Institut la centrale — Analyse 1 — Fonctions

TD N° 2 09-10 S1

Exercice 7

1/ Posons $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$

- f, g continues sur $[0,1]$ donc de même h
- $h(0) = f(0) - \lambda g(0) = -\lambda < 0$, $h(1) = f(1) - \lambda g(1) = 1 > 0$

Theoreme des valeurs intermediaires $\Rightarrow \exists x \in [0,1] \ / \ h(x) = 0$

càd $f(x) = \lambda g(x)$

2/ Posons $h(x) = f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}$

. f continue sur $[a,b] \Rightarrow h$ continue sur $[a,b]$

. $h(a) = f(a) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{f(a)-f(b)}{2}$; $h(b) = f(b) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{f(b)-f(a)}{2}$

$h(a)h(b) = -\frac{(f(a)-f(b))^2}{4} < 0 \overset{TVI}{\Rightarrow} \exists c \in]a,b[\ / \ h(c) = 0$

càd $h(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2} = 0$

Exercice 8

1/ $f(x) = x^7 + 3x^4 - x - 1$ $\quad f(0) = -1 < 0$; $f(1) = 2 > 0$

f continue sur $[0,1]$ $\overset{TVI}{\Longrightarrow} \exists \ c \in]0,1[\ / \ f(c) = 0$

2/ $f(x) = \ln(x^3 + x^2 + x - 3)$

- f continue sur $]1,2[$, $f'(x) = \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x-3} > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante sur $]1,2[$ ~~et $f(x)$~~ d'où $f(]1,2[) =]\lim_{1^+} f, \lim_{2^-} f[=]-\infty, \ln 11[$

$0 \in]-\infty, \ln 11[\Rightarrow \exists! c \in]1,2[\ / \ f(c) = 0$

Exercice 9

1/ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, montrons que f est continue en x_0

Pour $\varepsilon > 0$ m.que $\exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

On a $|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$

Pour avoir $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $k|x - x_0| < \varepsilon$ càd $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{k}$

il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon / k$

2/ a/ M.que la suite (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$?

- Montrons, tout d'abord, que $\forall n \in \mathbb{N} : |x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$
  - Pour $n = 0$ on a $|x_1 - x_0| \leq k^0 |x_1 - x_0|$ verifiée
  - Supposons vraie au rang n càd $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$

ETUSUP .com

On a $|U_{n+2}-U_{n+1}| = |f(U_{n+1})-f(U_n)| \leq k|U_{n+1}-U_n| \leq k.k^n|U_1-U_0|$

d'où $|U_{n+2}-U_{n+1}| \leq k^{n+1}|U_1-U_0|$ vraie au rang $n+1$

• Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy donc (x_n) converge

On a pour m,n de $\mathbb{N}$

$$|x_{m+n}-x_m| = |(x_{m+n}-x_{m+n-1})+(x_{m+n-1}-x_{m+n-2})+\dots+(x_{m+1}-x_m)|$$

$$\leq |x_{m+n}-x_{m+n-1}|+|x_{m+n-1}-x_{m+n-2}|+\dots+|x_{m+1}-x_m|$$

$$\leq (k^{m+n-1}+k^{m+n-2}+\dots+k^m)|x_1-x_0|$$

Or $k^m+k^{m+1}+\dots+k^{m+n-1} = k^m.\dfrac{1-k^n}{1-k} \leq \dfrac{k^m}{1-k}$; $0\leq k^n\leq 1 \Rightarrow 0\leq 1-k^n\leq 1$

d'où $|x_{m+n}-x_m| \leq \dfrac{k^m}{1-k}|x_1-x_0|$

La suite $y_m = \dfrac{k^m}{1-k}|x_1-x_0|$ converge vers 0 car $0<k<1$

d'où pour $\varepsilon>0$ $\exists N>0$ / $\forall m>N$: $|y_m-0|<\varepsilon$

d'où $\forall n>0, \forall m>N$: $|x_{n+m}-x_m|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ (x_n) est une suite de Cauchy

• M. que $f(\ell)=\ell$

(x_n) converge vers ℓ, f continue donc $x_{n+1}=f(x_n)$ converge vers $f(\ell)$

(x_n) et (x_{n+1}) converge vers la même limite donc $\ell=f(\ell)$

• Unicité de la limite

Soit ℓ une autre solution de l'equation $f(x)=x$ alors

$|f(\ell)-f(\ell')| \leq k|\ell-\ell'|$ càd $|\ell-\ell'| \leq k|\ell-\ell'|$

$k\in[0,1[\Rightarrow \ell-\ell'=0 \rightarrow \ell=\ell'$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..